REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Supérieure en Sciences Biologique d'Oran (ESSB d'Oran)
Département des Classes Préparatoire ou Département du Second Cycle

Polycopié Pédagogique

Matière

Plans d'expériences

-Cours-

Réalisé par :

Dr. NASSER Soraya

Niveau : 1ère année Génie enzymatique S2
Filière : Biotechnologie
Domaine : Sciences de la Nature et de la Vie

Année Universitaire : 2022/2023-*2023/2024*

Avant-propos

Ce polycopié a pour objectif de fournir aux étudiants une compréhension approfondie des plans d'expériences. Il vise à leur enseigner les méthodes et techniques nécessaires pour concevoir, analyser et interpréter des expériences de manière rigoureuse et efficace. Les étudiants apprendront à optimiser leurs recherches en étudiant simultanément plusieurs variables, en minimisant le nombre d'essais nécessaires et en maximisant le résultat visé. Ce document couvre une gamme de plans d'expériences, incluant les plans factoriels, fractionnaires, à surface de réponse, de mélanges, imbriqués et en parcelles divisées.

Le polycopié est destiné principalement aux étudiants de la première année du second cycle, spécialisés en Génie Enzymatique. Il peut également être utile à toute personne impliquée dans des recherches expérimentales, y compris les étudiants en biologie, chimie, physique, ingénierie et autres disciplines scientifiques.

Pour tirer pleinement parti des enseignements contenus dans ce polycopié, les étudiants doivent avoir une bonne connaissance des bases suivantes :

- Statistiques : Théorie des probabilités, distributions statistiques, tests d'hypothèses et analyse de variance (ANOVA).

- Mathématiques : Notions de base en algèbre linéaire.

Ces prérequis sont essentiels pour assurer une compréhension complète et une application efficace des plans d'expériences dans le cadre des recherches en génie enzymatique et autres domaines scientifiques.

Table des matières :

INTRODUCTION :

Les plans d'expériences (ou "plans expérimentaux") sont des méthodologies scientifiques utilisées pour concevoir des expériences de manière à optimiser un résultat visé tout en minimisant le nombre d'essais nécessaires. Ils sont particulièrement utiles dans les domaines de la recherche scientifique, de l'ingénierie, et des sciences sociales pour étudier les effets et les interactions de plusieurs variables sur un résultat d'intérêt. Ils permettent aux scientifiques et aux ingénieurs d'étudier la relation entre plusieurs variables d'entrée, ou facteurs, sur des variables de sortie clés ou des réponses.

La matière « Plans d'expériences » est destinée aux étudiants de la première année du second cycle en spécialité « Génie enzymatique » de l'école, afin de leur permettre de conduire des recherches rigoureuses et efficaces dans les expériences en laboratoire, en particulier lorsque plusieurs variables doivent être étudiées simultanément.

À la fin du cours, l'étudiant sera capable d'obtenir un maximum d'informations avec un nombre minimal d'essais. Il saura s'assurer que les conclusions sont basées sur des données systématiquement collectées, comprendre comment les facteurs interagissent entre eux, et faciliter l'optimisation des processus et des produits.

Le polycopié est composé de sept chapitres. Le premier chapitre est consacré aux définitions de base, tandis que les chapitres suivants expliquent les différents plans d'expériences, tels que : le plan factoriel complet, le plan fractionnaire, le plan de surface de réponse, le plan de mélanges, ainsi que le plan imbriqué et le plan en parcelles divisées.

Chapitre 1 :

Principes de base de la conception expérimentale

1.1 Définition :

Les plans des expériences (PEX) est une branche de la statistique appliquée axée sur l'utilisation de la méthode scientifique pour la planification, la réalisation, l'analyse et l'interprétation de données issues d'essais ou d'expériences contrôlés. PEX est une méthodologie mathématique utilisée pour planifier et mener efficacement une étude scientifique qui modifie simultanément les variables d'entrée (X) appelées Facteurs afin de révéler leurs effets sur une variable de sortie (ou plusieurs) (Y) appelée Réponse (Voir figure 1.1).

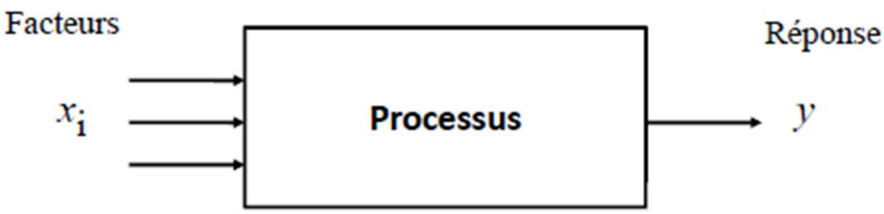


Figure 1.1 : Entrées et sorties d'une expérience

Autrement dit c'est une stratégie de recherche pour répondre à un certain nombre de questions :

- Comment sélectionner les expériences à faire ?
- Quelle est la meilleure stratégie pour :
- conduire le plus rapidement possible aux résultats espérés ?
- éviter des expériences inutiles ?
- apporter une bonne précision ?
- modéliser et optimiser des phénomènes étudiés ?

1.2 Termes et concept communs

Considérons le processus de cuisson d'un gâteau, Il y a trois aspects dans un processus d'un plan d'expériences :

• Réponses ou sorties de l'expérience : Dans le cas de la cuisson du gâteau, le goût, la consistance et l'apparence du gâteau sont des résultats mesurables potentiellement influencés par les facteurs et leurs niveaux respectifs. Les expérimentateurs souhaitent souvent éviter d'optimiser le processus pour une réponse au détriment d'une autre. Pour cette raison, les résultats importants sont mesurés et analysés afin de déterminer les facteurs et leurs niveaux qui fourniront le meilleur résultat global pour les caractéristiques essentielles de la qualité.

• **Facteurs ou entrées pour le processus :** Les facteurs peuvent être classés en variables contrôlables ou non contrôlables. Dans ce cas, les facteurs contrôlables sont les ingrédients du gâteau et le four dans lequel le gâteau est cuit. Les variables contrôlables seront appelées facteurs. Notez que la liste des ingrédients a été raccourcie pour cet exemple. De nombreux autres ingrédients pourraient avoir un impact significatif sur le résultat final (huile, eau, arôme, etc.). De même, il pourrait exister d'autres types de facteurs, tels que la méthode ou les outils de mixage, la séquence de mixage, etc. Les gens considèrent généralement un facteur de bruit comme un facteur incontrôlable qui provoque la variabilité dans des conditions de fonctionnement normales, mais dans certains cas ce facteur peut être contrôlé pendant l'expérience en utilisant le blocage et la randomisation. Pour la température, le facteur est dit quantitatif, c'est un facteur qui a une valeur donnée. Par contre, si par exemple, nous voulons étudier l'effet du zeste de citron sur le gout du gâteau, en réalisant des expériences sans zeste de citron et des expériences avec zeste de citron, dans ce cas, le facteur « zeste de citron » est dit qualitatif, le niveau bas et le niveau haut correspondront aux deux modalités du facteur : -1 pour « sans » et +1 pour « avec ». Toutefois ce même facteur peut être quantitatif si nous étudions sa quantité au lieu de son absence/présence.

• **Niveaux et domaine d'étude de chaque facteur** : En plans d'expériences, lorsque nous étudions l'influence d'un facteur, en général, nous limitons sa variation entre deux bornes appelées respectivement : niveau bas (-1) et niveau haut (+1) qui définissent le domaine d'étude de ce facteur. Si nous considérons 5 niveaux de la température (140 ,160 ,180, 200, 220), son domaine d'étude sera [140; 220].

• **Interaction :** Les interactions se produisent lorsque l'impact d'un facteur dépend de la valeur d'un second facteur.

• **Notion de modèle et de régression linéaire multiple** : La régression linéaire multiple est une méthode d'analyse de données quantitatives. Elle a pour but de mettre en évidence la liaison pouvant exister entre une variable dite expliquée (réponse), que nous la noterons y et plusieurs autres variables dites explicatives (facteurs) que nous les noterons $x_1, x_2, \dots, x_k$.

$$y = f(x_1, x_2, \dots \dots .., x_k) \quad (1.1)$$

L'équation 2 montre un exemple d'un modèle quadratique

$$y = \alpha_0 + \sum \alpha_i x_i + \sum \alpha_{ij} x_i x_j + \sum \alpha_{ii} {x_i}^2 + \epsilon \quad (1.2)$$

• **Variables codées :** L'utilisation des variables centrées réduites ou codées (-1, +1) présente l'intérêt de pouvoir généraliser la théorie des plans d'expériences quels que soient les facteurs ou les domaines d'études retenus. Utiliser les variables codées va permettre d'avoir pour chaque facteur le même domaine de variation [-1, +1] et de pouvoir ainsi comparer entre eux les effets des facteurs, et ce sont ces variables codées (sans dimensions et entre -1 et +1) qui sont utilisées dans l'équation du modèle obtenu. Exemple : nous choisissons pour le facteur température un domaine d'étude :[10˚C, 40˚C], nous affectons la valeur -1 à 10˚C et +1 à 40˚C et nous notons V_c la valeur codée et V_n la valeur naturelle. La figure 1.2 montre la correspondance proportionnelle entre les valeurs codées et naturelles.

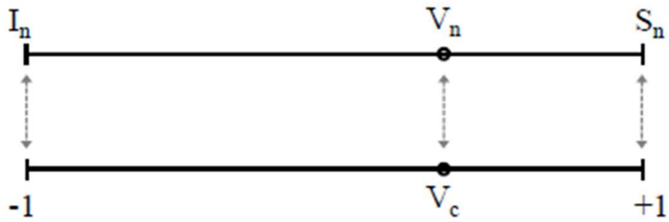


Figure 1.2 : Domaine de variation naturels/ codés

Où Sn et In sont respectivement la limite supérieure et inférieure du domaine d'étude de la variable température. Les variables centrées réduites sont sans unité. Une température de 20˚C correspond à une variable centrée réduite de -0.33. Les formules de conversion sont :

$$V_c = \frac{2V_n - (S_n + I_n)}{(S_n - I_n)} \quad (1.3)$$

$$V_n = \frac{V_c(S_n - I_n) + (S_n + I_n)}{2} \quad (1.4)$$

• **Les tests d'hypothèses** : permettent de fournir une règle de décision. Une hypothèse offre deux possibilités : l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative. C'est l'hypothèse nulle qui est soumise au test et toute la démarche du test s'effectue en considérant cette hypothèse comme vraie. Les tests sont effectués à un niveau de signification basé sur une probabilité.

1.3 Cas d'utilisation des plans d'expériences

Un PEX permet à l'expérimentateur de manipuler plusieurs entrées pour déterminer leurs effets sur la sortie de l'expérience ou du processus.

• De nombreuses expériences maintiennent certains facteurs constants et de modifient le niveau d'une autre variable. L'utilisation de cette approche "un facteur à la fois" (OFAT) pour traiter les données est toutefois inefficace par rapport à l'évolution simultanée des niveaux des facteurs. En réalisant une expérience multi-factorielle, le PEX peut révéler des interactions critiques entre les facteurs qui sont souvent omises lors de la réalisation d'une expérience simple. Alors, les PEX peuvent révéler des problèmes cachés au cours du processus, ces problèmes cachés sont généralement associés aux interactions des différents facteurs.

• Les ingénieurs seront en mesure d'identifier les facteurs qui ont le plus d'impact sur le processus et ceux qui ont le moins d'influence sur les résultats du processus c-à-d déterminer et quantifier les effets clés (effets principaux et effets des interactions) dans un processus donné. Ce qui permet une éventuelle réduction du nombre de facteurs à considérer en négligeant certains parmi ces facteurs.

• En utilisant correctement les plans d'expériences, le nombre d'essais ou de tests peut être considérablement réduit. Un plan d'expériences robuste peut faire gagner du temps et du coût lors d'une étude expérimentale.

• Les PEX permettent aussi de modéliser la réponse en fonction des différents facteurs ce qui définit une relation mathématique entre la réponse et ces facteurs et de fournir des informations statistiques sur la qualité du modèle obtenu (degré de son prédictibilité, robustesse, adéquation, etc). Cette modélisation permet de répondre à des questions du genre :

– Dans quels paramètres le processus offrirait-il des performances acceptables ? (Optimisation)

– Quelle sera la réponse du processus sous une configuration donnée des facteurs ? (Prédiction

1.4 Objectifs d'utilisation des plans d'expériences

1.4.1 Objectif de comparaison d'alternatives :

Dans le cas de notre exemple de la cuisson du gâteau, nous pourrions vouloir comparer les résultats de deux différents types de farine. S'il s'avérait que la farine des différents fournisseurs avait un résultat non significatif, nous pourrions choisir le fournisseur le moins coûteux. Si le résultat était significatif, nous choisirions celui de la meilleure farine.

1.4.2 Objectif de criblage :

Il existe souvent de nombreux facteurs possibles, dont certains peuvent être critiques et d'autres qui ne peuvent avoir que peu ou pas d'effet sur la réponse. En tant que but en soi, il est peut être souhaitable de réduire le nombre de facteurs à un ensemble relativement petit (2 à 5), de manière à concentrer l'attention sur le contrôle de ces facteurs. Les expériences de criblage sont un moyen efficace, avec un nombre minimal de tests, pour déterminer les facteurs importants. Nous pourrions poser une question : Quels sont les facteurs importants qui ont un impact sur la couleur du gâteau parmi : la température, la durée de la cuisson, la quantité du sucre et de la farine, le nombre d'œufs et l'utilisation du zeste de citron?

1.4.3 Objectif de modélisation

La méthodologie de surface de réponse est un ensemble de techniques mathématiques et statistiques pour la construction de modèles mathématiques empiriques. L'exploitation de ces modèles peut répondre à plusieurs objectifs :

• **Objectif de prédiction** :

Uu modèle mathématique obtenu peut être utilisé pour prédire une réponse à un point quelconque dans les limites des domaines expérimentaux. La précision des réponses obtenues dépend du degré de capacité de prédiction du modèle.

• **Objectif d'optimisation** :

Une optimisation est effectuée pour déterminer les valeurs des entrées du processus à utiliser pour obtenir la sortie du processus souhaitée. Les objectifs d'optimisation habituels peuvent être de maximiser le rendement d'un processus, de minimiser le temps de traitement nécessaire à la fabrication d'un produit ou d'atteindre une spécification du produit cible. Nous pourrions poser une question : Comment rendre le gâteau aussi humide que possible sans le désintégrer ?

• **Objectif d'optimisation multi-réponse (Équilibrer les compromis)** :

L'objectif est de déterminer les paramètres des facteurs permettant d'optimiser simultanément plusieurs réponses.

1.5 Les étapes des plans d'expériences

Obtenir de bons résultats par un PEX implique les sept étapes suivantes :

• **Poser des objectifs** : Les objectifs d'une expérience sont mieux déterminés par une discussion en équipe. Tous les objectifs doivent être écrits, même ceux qui ne semblent pas très intéressants. Le groupe devrait discuter des objectifs clés et des objectifs ”Bons mais pas vraiment nécessaires”. La priorisation des objectifs vous aide à choisir la direction à prendre en ce qui concerne la sélection des facteurs, les réponses et un plan particulier.

• **Sélectionner les variables du processus et leurs plages :** Les variables d'un processus incluent à la fois les entrées et les sorties - c'est-à-dire les facteurs et les réponses. La sélection de ces variables s'effectue mieux en équipe. L'équipe devrait :

– Inclure tous les facteurs importants (selon le jugement de l'ingénieur).

– Déterminer une plage d'étude pour chaque facteur.

– Être prudent en choisissant les niveaux bas et haut des facteurs.

– Vérifier les réglages des facteurs pour des combinaisons non pratiques ou impossibles.

– Inclure toutes les réponses pertinentes.

• **Choisir un plan expérimental** : Le choix d'un plan expérimental dépend des objectifs de l'expérience, du nombre de facteurs à étudier et de la quantité de ressources disponibles. La table 1.2 montre un simple guide exemple de sélection d'un plan.

Nombre de facteurs	Objectif comparatif	Objectif de dépistage	Surface de réponse
1	Plan totalement aléatoire à 1 facteur	_	_
2 - 4	Plan de bloc aléatoire	Factoriel complet ou fractionnaire	Central composite ou Box-Behnken
5 ou plus	Plan de bloc aléatoire	Factoriel fractionnaire ou Plackett-Burman	Dépistage en premier pour réduire le nombre de facteurs

Table1.2 Guide de sélection d'un plan

• **Exécuter le plan** : Les expériences du plan sont réalisées et les résultats des essais (réponses) sont rassemblés.

• Vérifier que les données sont cohérentes avec les hypothèses expérimentales : Dans tous les modèles, nous formulons des hypothèses et nous exigeons également que certaines conditions soient approximativement remplies à des fins d'estimation. Ceux-ci sont :

– Les systèmes de mesure sont-ils capables de répondre à toutes vos questions?

– Vos réponses sont-elles susceptibles d'être bien approchées par de simples modèles polynomiaux?

– Les résidus (la différence entre les prédictions du modèle et les observations réelles) se sont-ils bien comportés?

• Analyser et interpréter les résultats : En supposant l'existence d'un modèle de départ que nous souhaitons l'adapter à nos données expérimentales et que l'expérience ait été conçue correctement pour notre objectif, la plupart des progiciels PEX analyseront ces données et peuvent fournir plusieurs statistiques numériques ainsi que graphiques.

• Utiliser / présenter les résultats.

1.6 Classes des plans d'expériences

Il existe trois grandes familles de plans d'expériences :

• **Les plans de criblages** : dont l'objectif est de découvrir les facteurs les plus influents sur une réponse donnée en un minimum d'expériences.

Les plans pour surface de réponse : dont l'objectif est de trouver une relation mathématique (modèle) qui lie les réponses mesurées aux variables associées aux facteurs soit via une démarche mathématique analytique ou purement matricielle. Ce modèle peut être aussi utilisé à des fins d'optimisation du processus étudié.

• **Les plans de mélange** : dont l'objectif est le même que la deuxième famille mais où les facteurs ne sont pas indépendants et sont contraints. Comme exemple de contrainte, la somme des fractions molaires d'un mélange doit être égale à 1.

CHAPITRE 2 :

PLANS FACTORIELS

Dans les plans factoriels, plusieurs facteurs sont étudiés simultanément pendant l'étude. Des facteurs qualitatifs et/ou quantitatifs peuvent être pris en compte. L'objectif de ces plans est d'identifier les facteurs qui ont un effet significatif sur la réponse, ainsi que d'étudier l'effet des interactions (en fonction du plan d'expériences utilisé). Des prédictions peuvent également être effectuées lorsque des facteurs quantitatifs sont présents.

2.1 Plans factoriels complets à deux niveaux

Ce sont des plans factoriels où le nombre de niveaux pour chaque facteur est limité à deux (-1 et +1). Le fait de limiter les niveaux à deux et de mener une expérience factorielle complète réduit le nombre de traitements et permet d'étudier tous les facteurs et toutes leurs interactions. La figure 2.1 montre graphiquement deux plans factoriels complets pour deux et trois facteurs**.**

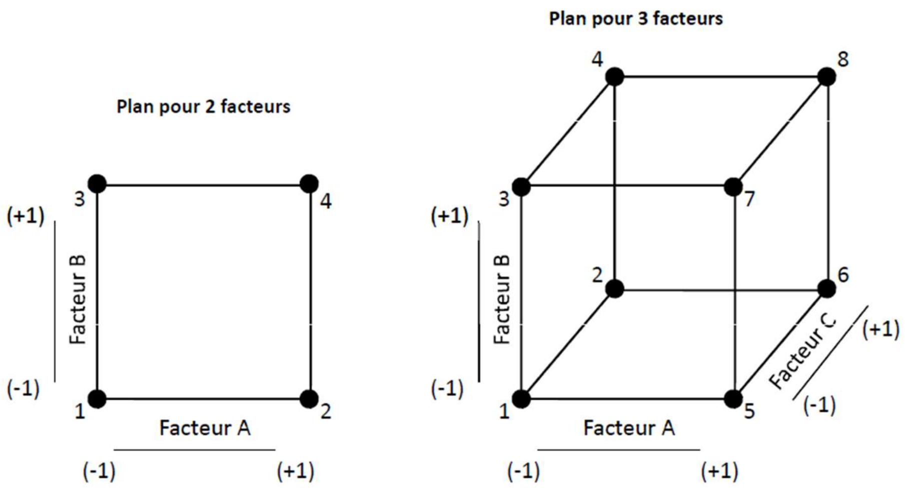


Figure 2.1 : Plans factoriels complets 2^2 et 2^3

Si tous les facteurs sont quantitatifs, les données de ces expériences peuvent être utilisées à des fins de prédiction, à condition qu'un modèle linéaire soit approprié pour modéliser la réponse.

2.2 Matrice d'expériences

La matrice d'expériences montre toutes les combinaisons possibles des niveaux haut et bas pour chaque facteur d'entrée. Ces niveaux haut et bas peuvent être codés +1 et -1. Par exemple, une expérience à 2 facteurs nécessitera 4 essais.

Un plan pour lequel nous avons k facteurs est appelé un plan 2^k. Le nombre d'expériences à réaliser sera donc 2^k expériences. Ce nombre devient rapidement très important. Par exemple pour seulement 7 facteurs, il faudrait 128 expériences. Pour diminuer le nombre des essais en conservant la possibilité d'étudier tous les facteurs, les plans factoriels fractionnaires à deux niveaux ont été proposés.

Une matrice d'expériences peut se construire à la main en suivant l'algorithme de Yates ; pour une colonne c nous alternons : une série de 2^{c-1} (-1) et de 2^{c-1} (+1). La figure 2.2 montre les matrices d'expériences pour deux plans factoriels complets 2^2 et 2^3.

Exp	x_1	x_2
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

Exp	x_1	x_2	x_3
1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	-1
5	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1
7	-1	+1	+1
8	+1	+1	+1

Figure 2.2 : Matrices d'expériences pour les plans factoriels complets 2^2 et 2^3

Le modèle mathématique postulé est un modèle du premier degré par rapport à chaque facteur. L'équation 2.1 représente le modèle postulé sans interactions.

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i + \epsilon \qquad (2.1)$$

Où a_0 représente l'effet théorique et les a_i représentent les effets principaux des différents facteurs. Le modèle avec interactions d'ordre 2 prend en considération les interactions entre chaque facteur et un autre. Les effets des interactions sont quantifiés et représentés par les coefficients a_{ij} de l'équation 2.2.

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i + \sum \sum_{i<j}^{k} a_{ij} x_i x_j + \epsilon \qquad (2.2)$$

Le modèle générique à k facteurs avec toutes les interactions est dit modèle complet, il peut être décrit par l'équation 2.3.

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i + \sum \sum_{i<j}^{k} a_{ij} x_i x_j + \dots\dots\dots\dots\dots + \sum \dots \sum_{i<j<\dots\leq k}^{k} a_{ij\dots k} x_i\, x_j \dots x_k + \epsilon \qquad (2.3)$$

2.3 Effets globaux et effets moyens

Soit la matrice d'expériences avec réponses (y_i) (table 2.1) pour un plan factoriel complet 2^2 pour deux facteur nommés x_1 et x_2.

Exp	x_1	x_2	Réponse (y_i)
1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	y_2
3	-1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

Table 2.1: Matrice d'expériences avec réponses pour un plan factoriel complet 2^2

Les effets principaux des facteurs ainsi que leurs interactions peuvent être quantifié : Les effets moyens d'un facteur aux niveau -1 et +1 correspondent aux moyennes des réponses pour chaque niveau. Les effets moyens du facteur x1 sont donnés par les équations 2.4 et 2.5.

$$a_1^- = \frac{y_1 + y_3}{2} \tag{2.4}$$

$$a_1^+ = \frac{y_2 + y_4}{2} \tag{2.5}$$

Idem pour le facteur x_2, les effets moyens sont donnés par les équations 2.6 et 2.7.

$$a_2^- = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{2.6}$$

$$a_2^+ = \frac{y_3 + y_4}{2} \tag{2.7}$$

2.3.1 Effet global d'un facteur :

L'effet global d'un facteur est défini comme la variation moyenne de la réponse en passant du niveau bas du facteur à son niveau haut. Dans un plan factoriel équilibré à deux niveaux, l'effet estimé d'un facteur est la variation moyenne de la réponse entre ses deux niveau (sachant que la réponse dans un niveau est représentée par son effet moyen).

$$a_1 = \frac{a_1^+ - a_1^-}{2} = \frac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{4} \tag{2.8}$$

$$a_2 = \frac{a_2^+ - a_2^-}{2} = \frac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{4} \tag{2.9}$$

2.3.2 Réponse théorique : est la moyenne des réponses observées aux niveaux -1 et +1.

$$a_0 = \frac{+y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \tag{2.10}$$

2.4 Effets des interactions :

Pour calculer l'effet d'une interaction entre plusieurs variables x_1, x_2,…,x_k, nous ajoutons à la matrice des effets une colonne, que nous la baptisons x_ix_j…..x_k, et que nous l'obtenons en faisant le produit "ligne à ligne" des colonnes des variables. L'effet moyen et l'effet global d'une interaction peuvent être calculés de la même manière que celle de l'effet global d'un facteur et son effet moyen. La matrice des effets principaux et des effets des interactions (pour deux facteur nous avons qu'une seule interaction) pour un plan factoriel complet pour deux facteurs est montré dans la table 2.2.

Exp	moy	x_1	x_2	x_1x_2	Réponse (y_i)
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4
Effets a_i	a_0	a_1	a_2	a_{12}	

Table 2.2: Matrice d'expériences avec effets pour un plan factoriel complet 2^2

Le coefficient a_{12} mesure donc la variation de l'effet du facteur x_1 quand le niveau du facteur x_2 est modifié. Nous pouvons aussi montrer que le même coefficient a_{12} mesure également la variation de l'effet du facteur x_2 quand le niveau du facteur x1 est, lui aussi, modifié.

2.5 Représentation graphique des effets

La représentation graphique permet une interprétation facile (visuelle) de l'effet des facteurs principaux et des interactions sur la réponse.

2.5.1 Graphiques des effets principaux

Puisqu'il est souvent difficile d'obtenir des informations en regardant une équation mathématique, les graphiques des effets principaux sont presque toujours importants. La représentation graphique des effets principaux peut être tracée à partir du tableau des réponses moyennes des effets principaux (voir table 2.6). Elle permet de :

• Montrer quels sont les facteurs qui ont un effet significatif et ceux qui ont un effet nul ou négligeable. La grandeur d'un effet est définie par la grandeur de la pente de la droite entre l'axe des abscisses et le tracé du graphique.

• Montrer si les facteurs ont un effets négatif ou positif. Cela dépend du signe de l'angle ; si l'angle est positif cela signifie que l'effet du facteur est positif. Si l'angle est négatif cela signifie que l'effet du facteur est négatif.

• Comparer les effets des différents facteurs. Cette comparaison est effectuée en fonction de la grandeur d'angle des différents facteurs (quel que soit son signe).

	T	D
Niveau bas : **-1**	$a_T^- = 39$	$a_D^- = 24$
Niveau haut : **+1**	$a_T^+ = 23$	$a_D^+ = 38$

Table 2.6: Effets moyens des facteurs T et D

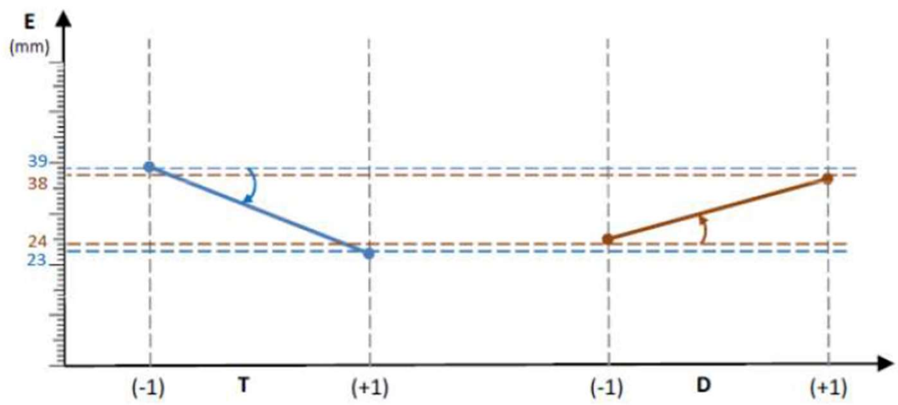
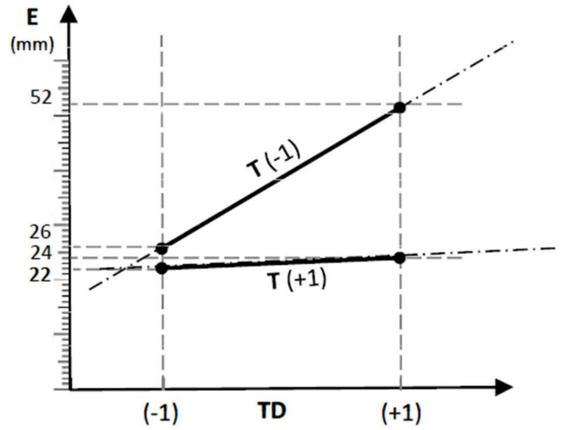


Figure 2.3: Représentation graphique des effets principaux T et D

En observant les deux graphiques des effets de la température et de la durée de cuisson dans la figure 2.3, nous constatons que les deux facteurs ont des effets globaux significatifs sur l'épaisseur du gâteau. Or, la température à un effet global négatif (en utilisant une température élevée de cuisson, donnera un gâteau moins épais et vice-versa), par contre la durée montre un effet global positif (en augmentant la durée de cuisson, nous obtiendrons un gâteau plus épais et vice-versa). Nous constatons aussi que l'effet global de la température sur l'épaisseur du gâteau est légèrement plus grand que celui de la durée de cuisson.

3.5.2 Graphiques des effets d'interactions

Lorsque des interactions significatives existent entre les facteurs expérimentaux, les diagrammes d'effets principaux ne racontent pas toute l'histoire sur les facteurs qui s'interagissent et peuvent même être trompeurs. Dans de tels cas, les graphiques d'interactions doivent être produits pour chaque paire de facteurs. La représentation graphique de l'effet d'une interaction peut être tracée à partir du tableau des réponses moyennes des interactions. Moins les lignes sont parallèles, plus une interaction significative est probable.



	T (-1)	T (+1)
D (-1)	$a_{TD}^{--} = 26$	$a_{TD}^{+-} = 22$
D (+1)	$a_{TD}^{-+} = 52$	$a_{TD}^{++} = 24$

Figure 2.4: Représentation graphique de l'effet de l'interaction TD

La figure 2.4 représente les données des réponses moyennes du facteur T pour les deux niveaux du facteur D. Les deux lignes du graphique ne sont pas parallèles et montre un effet important de l'interaction entre T et D.

2.6 Plans à plusieurs niveaux

2.6.1 Les tables de Taguchi

Les plans de tables orthogonales de Taguchi est un type de plans factoriels fractionnaires général. Il s'agit d'un plan orthogonal très fractionné basé sur une matrice proposée par M. Genichi Taguchi permettant de considérer un sous-ensemble sélectionné de combinaisons de plusieurs facteurs à plusieurs niveaux. Les tables orthogonales de Taguchi sont équilibrées pour garantir que tous les niveaux de tous les facteurs sont pris en compte de manière égale. Pour cette raison, les facteurs peuvent être évalués indépendamment les uns des autres malgré la fractionalité du plan.

Dans le plan de Taguchi, seuls les effets principaux et les interactions à deux facteurs sont pris en compte, et les interactions d'ordre supérieur sont supposées inexistantes.

2.6.2 Carrés latins

Les carrés latins (le terme Carré Latin a été utilisé pour la première fois par Euler, 1782) sont utilisés lorsque le nombre des niveaux des facteurs est supérieur à deux et lorsqu'il n'existe pas d'interactions (ou qu'elles sont négligeables) entre les facteurs. Un carré latin pour 3 facteurs est souvent utilisé pour les variables discrètes et son modèle mathématique est souvent un modèle sans interactions.

2.6.3 Carrés de Youden

Ce type de plans considère deux variables discrètes et prend plus de quatre niveaux. Ils ont servi également de base à l'établissement des plans pour simulations numériques. Ce type de plans est similaire à celui des carrés latins. Le nombre des essais est réduit en retirant des points au plan complet.

Chapitre 3 :

Signification des effets et modèle

3.1 Test de signification des effets

L'influence des facteurs et de leurs interactions est interprétée par les coefficients du modèle postulé. Il faut donc trouver une valeur étalon (tcrit) pour la prise de décision si l'effet d'un facteur ou d'une interaction est important ou non (Un effet sera dit significatif s'il est, pour un risque donné, significativement différent de 0). Le test de Student a pour but de fournir une règle de décision. La valeur à tester ti sera le rapport de la valeur du coefficient ai sur la valeur de son écart-type Si (équation 3.1) :

$$t_i = \frac{a_i}{S_i} \qquad (3.1)$$

3.1.1 Calcul de la variance des coefficients S_i^2

En statistique la formule qui détermine la variance des coefficients $\boldsymbol{S_i^2}$ en fonction de la variance des écarts S_2 est donnée par l'équation 3.2.

$$S_i^2 = kS^2 \qquad (3.2)$$

Où la constante k dépend du modèle postulé et de la matrice d'expériences. Généralement k est très long à calculer (Des logiciels spécialisés possèdent les algorithmes pour faire ce calcul). Mais dans le cas des plans factoriels la relation est plus simple devient (3.3) :

$$S_i^2 = \frac{1}{n}S^2 => S_i = \sqrt{\frac{S^2}{n}} \qquad (3.3)$$

Les calculs statistiques qui permettent de déterminer l'écart type Si font intervenir la variance des écarts (les différences entre les valeurs expérimentales yi et les valeurs estimées (prédites) par le modèle $\widehat{yi}^2$

2) selon l'équation 3.4.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p} \qquad (3.4)$$

Où n est le nombre d'expériences réalisées et p est le nombre de coefficients du modèle.

Remarque : Pour pouvoir conduire les calculs statistiques il est clair que (n - p) doit être différent de 0. Pour cela, en pratique il est nécessaire de négliger un ou plusieurs termes (en général l'interaction (les interactions) d'ordre plus élevé pour que p soit différent de n. Si un plan complet 2^3 est considéré, ça donne 8 expériences et 8 termes du modèle (a_0, 3 effets principaux, 3 effets d'interactions d'ordre deux et 1 effet d'interaction d'ordre trois). Pour permettre le test statistique, l'interaction d'ordre trois peut être négligée ce qui donne un modèle réduit avec 7 termes (p = 7).

Détermination de la valeur critique t_{crit}

Afin de pouvoir tester la signification d'un effet avec un risque donné α, le test de Student est utilisé ; le rapport ti est comparé à une valeur critique t_{crit} pour un risque α et un degré de liberté ddl = n - p. Cette valeur critique peut être directement lue à partir de la table de Student (voir table 3.2).

$$t_{crit} = v(\alpha, dll) \quad (3.2)$$

Par exemple la valeur critique de student tcrit pour un modèle dont p = 7, n = 8 et pour un risque α = 0,05 correspond à la cellule de l'intersection de la première ligne (n - p = 1) et la sixième colonne (α = 0,05) dans la table de student 3.2 (Voir la table 3.1).

dll/α	**0.5**	**0.4**	**0.3**	**0.2**	**0.1**	**0.05**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.002**	**0.001**
1	~~1.000~~	~~1.376~~	~~1.963~~	~~3.078~~	~~6.314~~	$\boxed{12.71}$	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.080	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60

Table 3.1: Lecture d'une valeur t_{crit} depuis la table de Student

Réalisation du test et interprétation

L'hypothèse selon laquelle l'effet ai est nul s'appelle l'hypothèse nulle et est notée H_0. N'importe quelle autre hypothèse qui diffère de l'hypothèse H0 s'appelle l'hypothèse alternative et est notée H_1 (α% de confiance pour que l'effet soit significativement différent de zéro). Nous aurons :

• H_0 : l'effet ai est nul c-à-d ai n'est pas significatif.

• H_1 : l'effet ai n'est pas nul c-à-d ai est significatif**.**

Après avoir calculé les rapports ti, ces valeurs sont comparées avec la valeur critique t_{crit} pour déterminer la signification des effets ou leur non signification.

• Si $|ti| > t_{crit}$, l'hypothèse H_0 est rejetée (H_1 est acceptée) c-à-d l'effet ai est significatif.

• Sinon ($|ti| <= t_{crit}$), l'hypothèse H_0 est acceptée (H_1 est rejetée) c-à-d l'effet ai n'est pas significatif**.**

dll/α	**0.5**	**0.4**	**0.3**	**0.2**	**0.1**	**0.05**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.002**	**0.001**
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.080	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Table 3.2: Table de Student

3.2 Test de validation du modèle

Dans les cas où il y a plus de deux échantillons de test, une ANOVA est utilisée pour déterminer s'il existe des différences statistiquement significatives entre les moyennes des échantillons (Dans les cas de deux échantillons, le test t suffit à vérifier s'il existe des différences statistiquement significatives entre les moyennes des échantillons). La procédure de test implique une analyse de variance (ANOVA) et la réalisation du test F (Fisher-Snedecor) qui teste la signification de la régression dans sa globalité (il teste la nullité de tous les coefficients en même temps). Il ne permet donc pas de préjuger la signification particulière des coefficients pris isolément. C'est ce que fait le test de Student qui teste un à un la signification des coefficients. Il s'agit de tester les hypothèses **:**

H_0 : $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$

H_1 : il existe au moins un $a_i \neq 0$.

La variance de la variable à expliquer (ou totale) se décompose en somme de la variance expliquée par le modèle et de la variance résiduelle.

$$STCE = SCEL + SCER \qquad (3.4)$$

Somme des carrés des écarts dues à la liaison (SCEL) : est la somme des carrés expliquée par le modèle :

$$SCEL = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \qquad (3.5)$$

Somme des carrés des écarts des résidus (SCER) : est la somme des carrés des résidus.

$$SCER = \sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad (3.6)$$

Notons que : y_i sont les réponses observées lors de la réalisation des expériences, $\bar{y}$ est la moyenne des réponses et $\hat{y}_i$ sont les réponses estimées à l'aide du modèle. De plus des "carrés moyens" sont définis qui sont le quotient d'une somme de carrés par son degré de liberté (CML, CMR et CMT).

SCEL aura p - 1 degrés de liberté (p est le nombre de coefficients estimés du modèle).

SCER aura n - p degrés de liberté (où n est le nombre d'expériences réalisées).

STCE aura n - 1 degrés de liberté

Variation due à	Somme des carrés	ddl	Carré moyen	F
Liaison	$SCEL$	$p-1$	$\frac{SCEL}{p-1} = CML$	$F_{cal} = \frac{CML}{CMR}$
Résidus	$SCER$	$n-p$	$\frac{SCER}{n-p} = CMR$	
Totale	$STCE$	$n-1$	$\frac{STCE}{n-1} = CMT$	

Table 3.3: Tableau d'analyse de la variance

le F_{crit} (ddl_1; ddl_2; α) lu à partir de la table de Fisher-Snedecor (Tableau 3.4) avec les degrés de liberté ddl_1 = p-1, ddl_2 = n-p et avec un risque fixé à l'avance α. Le critère est de rejeter H_0 au seuil α si $F_{cal} > F_{crit}$.

- Accepter H_0 implique que l'on conclut qu'il n'y a pas de relation globale entre x_i et y. Ceci peut signifier que :

• Le modèle utilisé n'est pas adéquat.

• La variation des x_i influent peu ou pas sur la variation de y.

Au contraire, rejeterH_0 implique que nous concluons que la variation des xi influe la variation de y. Autrement dit :

- Si Fcal > Fcrit le modèle de la régression linéaire est considéré comme valide.
- Sinon, le modèle est considéré comme non valide.

n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
n_2													
1	161	199,5	215,7	224,6	230,2	234	236,8	239	240,5	241,9	243,9	245,9	248
2	18,5	19	19,16	19,25	19,3	19,33	19,35	19,4	19,38	19,4	19,41	19,43	19,45
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,7	8,66
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6	5,96	5,91	5,86	5,8
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,1	4,06	4	3,94	3,87
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,5	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94
10	4,96	4,1	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,2	3,09	3,01	2,95	2,9	2,85	2,79	2,72	2,65
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3	2,91	2,85	2,8	2,75	2,69	2,62	2,54
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,6	2,53	2,46
14	4,6	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,7	2,65	2,6	2,53	2,46	2,39
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,9	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,4	2,33
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28
17	4,45	3,59	3,2	2,96	2,81	2,7	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19
19	4,38	3,52	3,13	2,9	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16
20	4,35	3,49	3,1	2,87	2,71	2,6	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,2	2,12
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,1
22	4,3	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,4	2,34	2,3	2,23	2,15	2,07
23	4,28	3,42	3,03	2,8	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,2	2,13	2,05
24	4,26	3,4	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,3	2,25	2,18	2,11	2,03
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,6	2,49	2,4	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,2	2,13	2,06	1,97
28	4,2	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96
29	4,18	3,33	2,93	2,7	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,1	2,03	1,94
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2	1,92	1,84
60	4	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,1	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66
infini	3,84	3	2,6	2,37	2,21	2,1	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57

Table 3.4: Table de Fischer – Snedecor (risque α= 0.05)

3.2.1 Quelques mesures statistiques d'évaluation du modèle

Coefficient de détermination R^2

Le coefficient de détermination R^2 montre dans quelle mesure un modèle de fonction correspond aux données. Plus R^2 est proche de 1, meilleur est la correspondance. R^2 est donc une mesure de la qualité du modèle, il est toujours entre 0 et 1. S'il est égal à 1, le modèle permet de retrouver les valeurs des réponses mesurées.

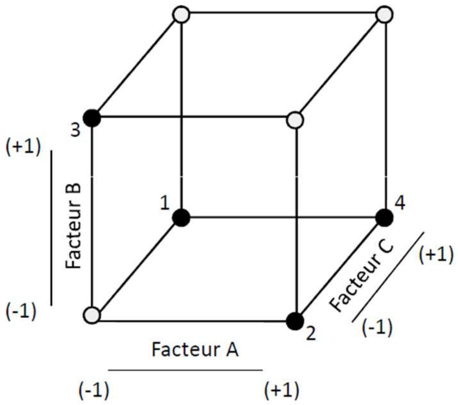
$$R^2 = 1 - \frac{SCER}{STCE} = \frac{SCEL}{STCE} \tag{3.7}$$

Chapitre 4 :

Plans factoriels fractionnaires

Comme son nom l'indique, le plan factoriel fractionnaire est une fraction d'un plan factoriel complet. Un plan factoriel fractionnaire est construit de manière à pouvoir encore identifier les principaux effets sans acquérir les informations détaillées fournies par un plan factoriel complet.

Les expériences sont sélectionnées en utilisant une sélection symétrique des angles, des diagonales et des diagonales opposées (voir figure 4.1). La demi-fraction d'un plan à trois facteurs nécessite quatre essais. Le plan comprend deux ensembles de quatre essais chacun, exactement équivalents sur le plan mathématique, où chaque ensemble peut être choisi (4.1).



Exp	A	B	C
1	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	-1	+1

Figure 4.1: Plan factoriel fractionnaire 2^{3-1}

En général, un plan factoriel fractionnaire peut être décrit par $N = 2^{k-p}$ où :

• N est le nombre d'expériences.

• k est le nombre de facteurs à étudier.

• p est la taille de la fraction (1 => 1/2, 2 =>1/4 , 3 => 1/8, etc.).

Par conséquent, $N = 2^{4-1}$ signifie que quatre facteurs seront examinés en $2^3 = 8$ exécutions. La **force** d'un plan factoriel fractionnaire réside dans le fait qu'il permet de sélectionner de nombreux facteurs en utilisant relativement peu d'expériences, cependant, l'**inconvénient** de ce type de plan est que les effets sont confondus.

Les plans fractionnaires sont généralement utilisés en tant que plans de criblage pour déterminer quels sont les facteurs les plus influents sans forcément étudier les interactions d'ordre 2. C'est souvent le cas si le nombre de facteurs est très élevé.

4.1 Notion d'alias et de contraste

Un plan factoriel fractionnaire est généré à partir d'un plan factoriel complet en choisissant une structure d'alias. La structure d'alias détermine quels effets sont confondus.

Par exemple, un plan factoriel fractionnaire 2^{5-2} avec les 5 facteurs peut être généré en utilisant un plan factoriel complet 2^3 impliquant trois facteurs (disons A, B et C), puis en choisissant de confondre les deux facteurs restants.

D et E avec les interactions générées par D = A B et E = A C. Ces deux expressions sont appelées les générateurs d'alias.

Une caractéristique importante d'un plan fractionnaire est la relation de définition, qui donne à l'ensemble des colonnes d'interaction une valeur égale dans la matrice du plan à une colonne de signes plus, notée I.

Pour l'exemple puisque D = AB et E = AC, alors ABD et ACE sont deux colonnes de signes plus, et par conséquent BDCE aussi. Dans ce cas, la relation de définition du plan factoriel fractionnaire est : I = ABD = ACE = BCDE.

4.1.1 Génération d'alias

Les générateurs d'alias servent à calculer la structure des alias qui décrit les confusions des plans factoriels fractionnaires, toute lettre multipliée par elle-même désigne l'identité I.

I multiplié par toute lettre désigne cette même lettre. Les lettres sont commutatives et associatives. Pour obtenir tous les alias pour chaque terme nous multiplions les termes de la relation de définition par les facteurs initiaux constituant la matrice extraite.

- **Commutativité : AB=BA**
- **Associativité : A(BC)=(AB)C=ABC**
- **Elément Neutre I (colonne de (+)) : IA=AI=A**
- **AA=I quel que soit A**

$$I = ABD = ACE = BCDE$$
$$A = ABD * A = BD\ , A = ACE * A = CE\ , A = BCDE * A = ABCDE$$
$$B = ABD * B = AD\ , B = ACE * B = ABCE\ , B = BCDE * B = CDE$$
$$C = ABD * C = ABCD\ , C = ACE * C = AE\ , C = BCDE * C = BDE$$
$$D = ABD * D = AB\ , D = ACE * D = ACDE\ , D = BCDE * D = BCE$$
$$E = ABD * E = ABDE\ , E = ACE * E = AC\ , E = BCDE * E = BCD$$
$$BE = ABD * BE = ADE\ , BE = ACE * BE = ABC\ , BE = BCDE * BE = CD$$
$$BC = ABD * BC = ACD\ , BC = ACE * BC = ABE\ , BC = BCDE * BC = DE$$

Termes initiaux

Exp	I ABD ACE BCDE	A BD CE ABCDE	B AD CDE ABCE	C AE BDE ABCD	AB D BCE ACDE	AC E BCD ABDE	BC DE ABE ACD	ABC CD BE ADE	y_i
1	+	-	-	-	+	+	+	-	y_1
2	+	+	-	-	-	-	+	+	y_2
3	+	-	+	-	-	+	-	+	y_3
4	+	+	+	-	+	-	-	-	y_4
5	+	-	-	+	+	-	-	+	y_5
6	+	+	-	+	-	+	-	-	y_6
7	+	-	+	+	-	-	+	-	y_7
8	+	+	+	+	+	+	+	+	y_8
h_i	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	

4.1.2 Contrastes h_i

Les nouveaux coefficients h_i calculés avec la matrice des effets par la méthode habituelle seront nommés contrastes. Un contraste h_i est une somme d'effets de facteurs principaux et d'interactions.

$$h_0 = a_0 + a_{ABD} + a_{ACE} + a_{BCDE}$$

$$h_1 = a_A + a_{BD} + a_{CE} + a_{ABCDE}$$

$$h_2 = a_B + a_{AD} + a_{CDE} + a_{ABCE}$$

$$h_3 = a_C + a_{AE} + a_{BDE} + a_{ABCD}$$

$$h_4 = a_D + a_{AB} + a_{BCE} + a_{ACDE}$$

$$h_5 = a_E + a_{AC} + a_{BCD} + a_{ABDE}$$

$$h_6 = a_{BE} + a_{CD} + a_{ABC} + a_{ADE}$$

$$h_7 = a_{BC} + a_{DE} + a_{ABE} + a_{ACD}$$

4.2 Estimation des effets et des interactions a_i

Le calcul des contrastes h_i peut être effectué en utilisant la méthode habituelle du calcul des coefficients. Quant au calcul des effets des facteurs principaux et des interactions pour obtenir un modèle en fonction des différents termes, il est impossible de résoudre tel système d'équations car le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. Pour cela un ensemble d'hypothèses peuvent être appliquées pour déduire (estimer) les différentes valeurs des a_i.

- Hypothèse 1 : Les interactions d'ordre 3 et plus sont supposées négligeables.
- Hypothèse 2 : S'il s'avère qu'un contraste est négligeable, tous les termes aliasés avec ce contraste sont aussi négligeables.
- Hypothèse 3 : Si les effets de deux facteurs sont négligeables, l'effet de leur interaction est aussi considéré comme négligeable.
- Hypothèse 4 : Si l'effet d'un des facteurs qui est composant d'une interaction est négligeable, l'interaction est généralement aussi négligeable.

Chapitre 5 :

Plans pour surfaces de réponse

5.1 Plans pour surfaces de réponse :

La méthodologie pour surfaces de réponse, ou RSM, est un ensemble de techniques mathématiques et statistiques dans laquelle une réponse d'intérêt est influencée par plusieurs variables.

RSM se situent dans les situations particulières où plusieurs variables d'entrée influencent potentiellement une mesure de performance (réponse).

La méthodologie pour surfaces de réponse comprend

- La stratégie expérimentale d'exploration de l'espace du processus.
- La modélisation empirique permettant de développer une relation d'approximation appropriée entre le rendement et les variables du processus.
- Des méthodes d'optimisation permettant de rechercher les valeurs des variables du processus, qui produisent des valeurs souhaitables de la réponse.

Les plans du second degré ou plans pour surfaces de réponse permettent d'établir des modèles mathématiques du second degré. Ils sont utilisés pour les variables continues.

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum\sum_{i<j}^{k} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \epsilon \tag{5.1}$$

5.1.1 Les plans composites centrés

Un plan composite est constitué de trois parties :

1. Un plan factoriel complet ou fractionnaire dont les facteurs prennent deux niveaux.
2. Au moins un point expérimental situé au centre du domaine d'étude.
3. Des points axiaux. Ces points expérimentaux sont situés sur les axes de chacun des facteurs.

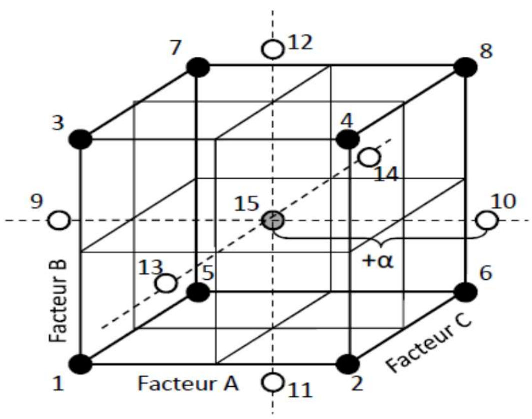


Figure 5.1. Plan composite centré

Un plan composite centré pour trois facteurs. Les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sont les points expérimentaux d'un plan 2^3. Le point 15 est le point central. Ce point peut être répliqué plusieurs fois. Les points 9, 10, 11, 12, 13 et 14 sont les points axiaux. Ces six derniers points forment le plan en étoile**.**

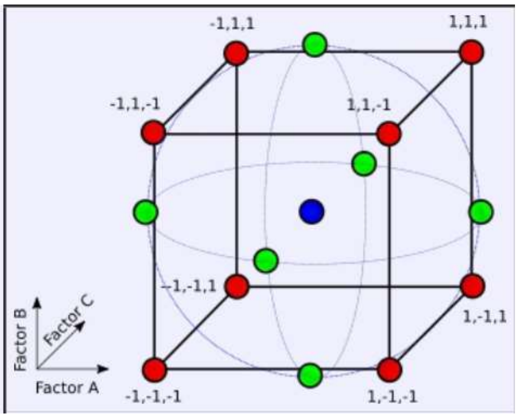
Si la distance entre le centre de l'espace du plan et un point factoriel est de $\pm$ 1 unité pour chaque facteur, la distance entre le centre de l'espace de calcul et un point en étoile est $|\alpha|$> 1.

La valeur précise de α et le nombre de points centraux que le plan doit contenir dépendent de certaines propriétés souhaitées pour le plan et du Nombre de facteurs en cause.

$$\alpha = (2^{k-p})^{1/4} \qquad (5.2)$$

Matrice d'expériences

Tests	Facteurs		
	Un	B	C
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	-1	1	-1
4	1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	-1	1	1
8	1	1	1
9	0	0	0
10	0	0	0
11	0	0	0
12	-1.682	0	0
13	1.682	0	0
14	0	-1.682	0
15	0	1.682	0
16	0	0	-1.682
17	0	0	1.682
18	0	0	0
19	0	0	0
20	0	0	0



Nom	Facteurs	Lignes	Point central	Distance circonscrite
CCD2	2	13	5	1.414
CCD3	3	20	6	1.682
CCD4	4	30	6	2.000
CCD5	5	52	10	2.378
CCD6	6	91	15	2.828

5.1.2 Plan de Box Behken

Une méthodologie pour surfaces de réponse (RSM) qui ne nécessite que trois niveaux pour exécuter une expérience.

Il s'agit d'un plan spécial à 3 niveaux car il ne contient aucun point aux sommets de la région expérimentale. Cela peut être avantageux lorsque les points situés aux angles du cube représentent des combinaisons de niveaux d'un coût prohibitif ou impossibles à tester en raison des contraintes du processus.

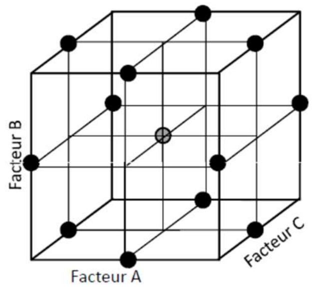
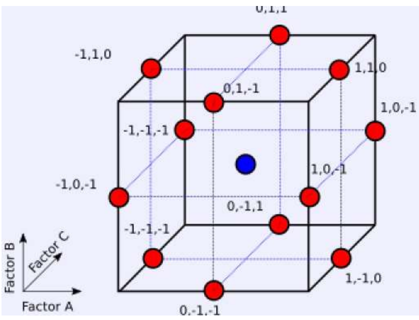


Figure 5.2. Plan Box Behken

Matrice d'expériences

Tests↓	Facteurs		
	Un	B	C
1	-1	-1	0
2	1	-1	0
3	-1	1	0
4	1	1	0
5	0	0	0
6	0	-1	-1
7	0	-1	1
8	0	1	-1
9	0	1	1
10	0	0	0
11	-1	0	-1
12	-1	0	1
13	1	0	-1
14	1	0	1
15	0	0	0



Nom	Facteurs	Lignes	Points centraux
BB3	3	15	3
BB4	4	27	3
BB5	5	45	5
BB6	6	54	6

5.2 Représentation graphique

5.2.1 Surface de réponse

Les surfaces de réponse reproduisent les variations d'un phénomène donné dans un espace à trois dimensions. Le plan horizontal de cet espace matérialise le domaine de variation de 2 facteurs alors que l'axe vertical matérialise la variation de la réponse à partir du modèle empirique.

Si on a plus que 2 facteurs, il faut dans ce cas fixer à un niveau constant les autres facteurs qui n**e** figurent pas dans le plan horizontal.

La figure suivante montre un exemple de plusieurs surfaces.

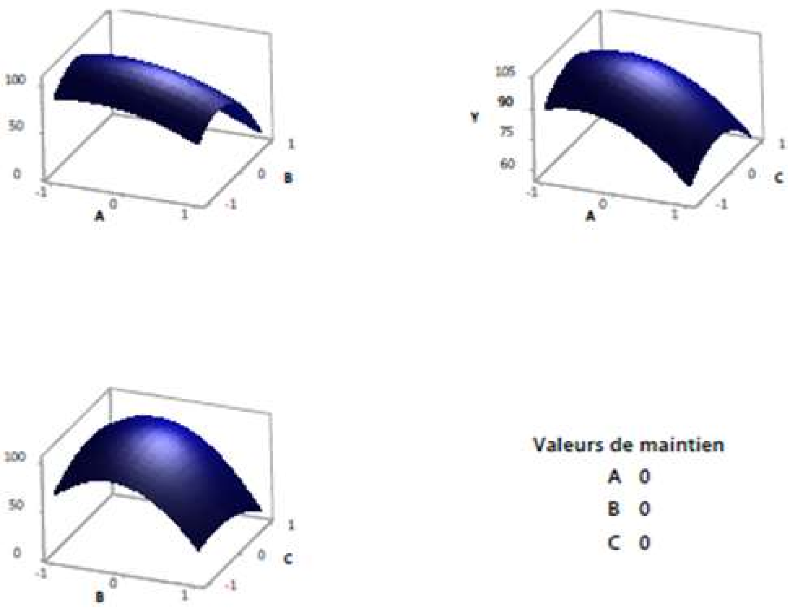


Figure 5.3 : Exemple de surface de réponse

5.2.2 Courbe iso-réponse

Les courbes iso-réponse sont une sorte de projection d'une surface tridimensionnelle (surface de réponse) sur un plan à deux dimensions. Ces courbes sont présentées comme des courbes de niveaux, dessinées sur une carte topographique. Tout comme pour les surfaces de réponse, cette représentation ne fait intervenir que 2 facteurs à la fois, les autres devant être fixés à un niveau constant. La figure suivante montre un exemple de plusieurs contours pour un plan à 3 facteurs.

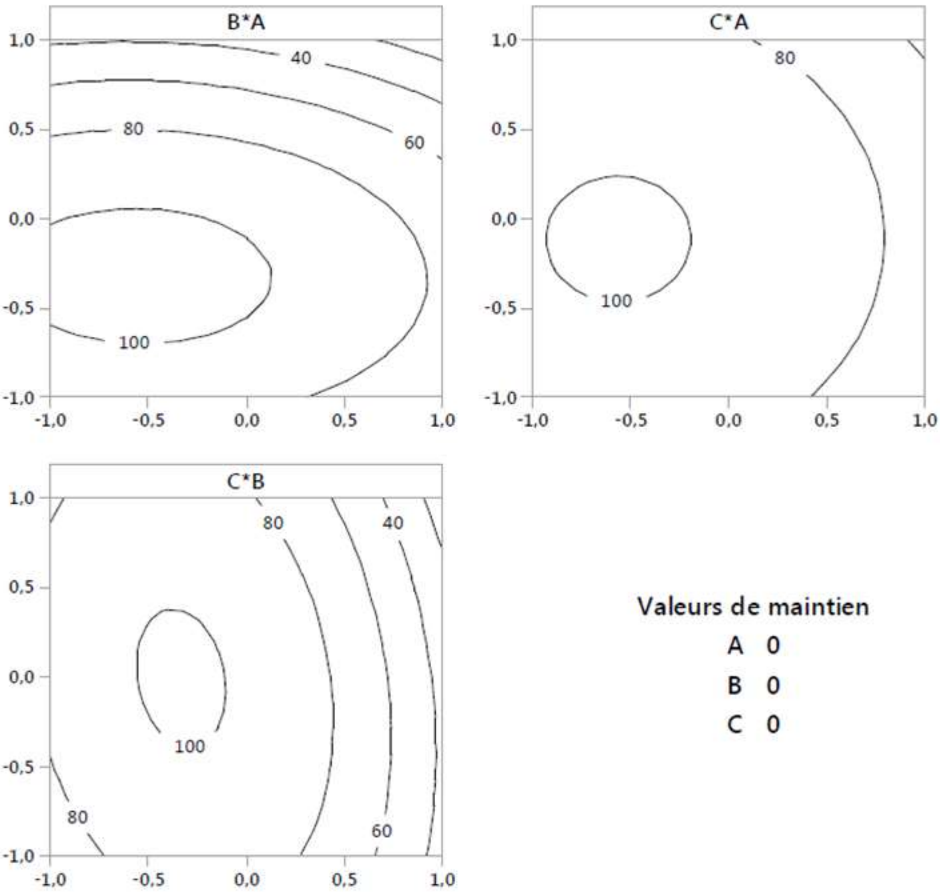


Figure 5. 4 Exemple de surface de réponse

Un autre exemple représente une courbes d'iso-repenses de taux d'azote en fonction de la H_2SO_4 et quantité de catalyseur.

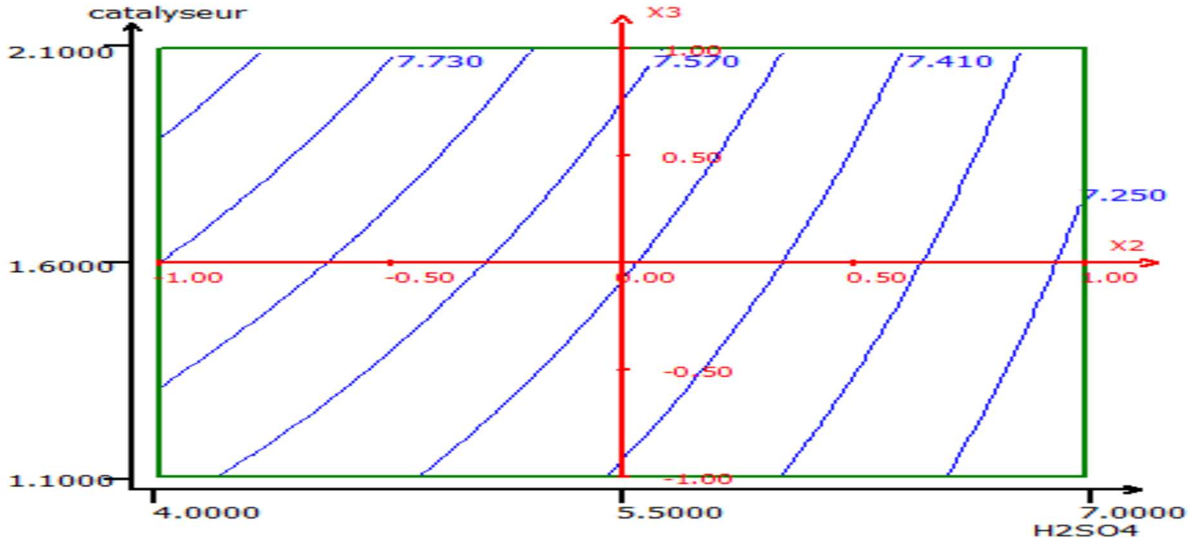


Figure 5.5 Courbes d'iso-repenses de taux d'azote en fonction de la H_2SO_4 et quantité de catalyseur.

Interprétation du courbe:

Pour le taux d'azote, on remarque clairement que:

- Plus on augmente la quantité de catalyseur plus le taux d'azote augmente, ce qui montre l'effet positif du catalyseur sur la réponse.
- Par contre plus on augmente le volume de H_2SO_4 le taux d'azote diminue ce qui confirme l'effet négatif d'acide sur la réponse.

CHAPITRE 6 :

PLANS DE MELANGE

Les facteurs d'étude des plans de mélanges sont les proportions des constituants du mélange. Or, ces constituants ne sont pas indépendants les uns des autres. La somme des proportions d'un mélange est toujours égale à 100%. Le pourcentage du dernier constituant est imposé par la somme des pourcentages des premiers composés. C'est la raison pour laquelle les plans de mélanges sont traités à part.

Les plans de mélanges sont aussi caractérisés par de nombreuses contraintes qui peuvent peser sur le choix des proportions des constituants. Par exemple, la concentration d'un produit doit être au moins de *x* pour-cent ou cette concentration ne peut excéder une valeur donnée. En fonction de ces contraintes la planification de l'étude est modifiée et elle doit être adaptée à chaque cas.

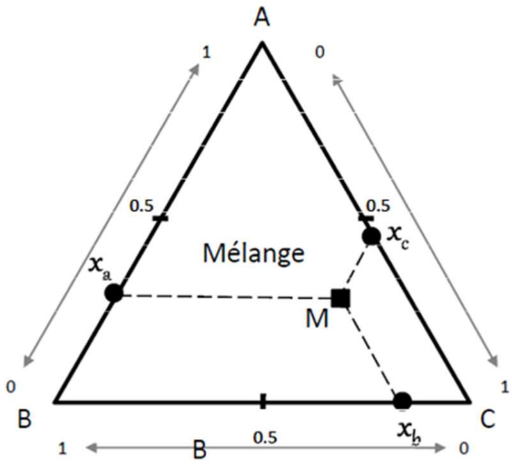


Figure 6.1: Valeurs des composants dans un plan de mélange à trois constituants

Un point de la surface intérieure du triangle équilatéral représente un mélange tertiaire. Les compositions de chaque produit se lisent sur les côtés du triangle.

Les propriétés géométriques du triangle équilatéral assurent que la contrainte fondamentale des mélanges est bien respectée.

6.1 Modèles mathématiques des mélanges

La contrainte fondamentale des mélanges fait disparaître la constante et les termes du second degré se réduisent aux termes rectangles. Pour trois composants, le modèle du premier degré est donc :

$$Y=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3 \tag{6.1}$$

et pour le second degré :

$$Y=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+b_{23}x_2x_3 \tag{6.2}$$

On est souvent amené à utiliser des modèles de degré supérieur, trois et même parfois quatre si les surfaces de réponses sont compliquées. Plus le degré du modèle est élevé, plus il faut réaliser de points d'expériences pour pouvoir déterminer tous les coefficients. Ces coefficients sont calculés à partir de la relation de régression.

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'Y \tag{6.3}$$

Les mélanges sont également caractérisés par des contraintes : contraintes basses, contraintes hautes ou contraintes relationnelles.

6.2 Types des plans de mélange

Lorsque les composants du mélange sont soumis à la contrainte qu'ils doivent s'additionner, il existe des plans de mélange standard pour l'ajustement, telles que les Plans de Mélange en Réseaux et les Plans de Mélange Centrés. Lorsque des composants de mélange sont soumis à des contraintes supplémentaires, telles qu'une valeur maximale et / ou minimale pour chaque composant, des plans autres que les plans de mélange standard, appelées plans de mélange contraints ou Plans Sommets Extrêmes, sont appropriés.

6.2.1 Plans de mélange en réseau

Un Plan de mélange en réseau (q,m) pour q composants est constitué de points définis par les paramètres de coordonnées suivants : les proportions assumées par chaque composant prennent les m + 1 valeurs également espacées de 0 à 1.

x_i = 0, 1/m, 2/m, .., 1 pour i = 1, 2,…., q et toutes les combinaisons possibles (mélanges) des proportions de cette équation sont utilisées. À l'exception du centre, tous les points du plan se trouvent sur les limites du simplexe.

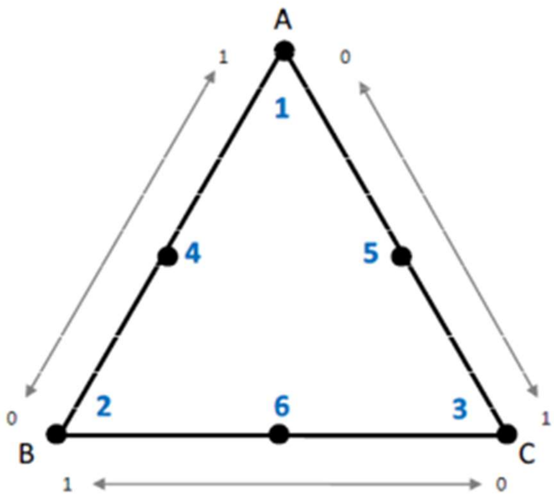


Figure 6.2: Plan de mélange en réseau

Considérons un mélange à trois composants pour lequel le nombre de niveaux équidistants pour chaque composant est de deux (c'est-à-dire, x_i = 0, 0.5, 1). La figure 6.2 montre la région expérimentale et la distribution des points du plan sur la région simplex. Il existe 6 points expérimentaux pour le plan de mélange en réseau (3, 2).

Dans cet exemple, q = 3 et m = 2. Si nous utilisons tous les mélanges possibles des trois composants avec ces proportions, le simplex réseau contient alors les 6 expériences de mélange énumérées dans la matrice d'expériences de la table 6.1.

Exp	A	B	C
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1
4	0,5	0,5	0
5	0,5	0	0,5
6	0	0,5	0,5

Table 6.1: Matrice d'expériences pour un plan de mélange en réseau (3,2)

Les points comprennent les composantes pures et suffisamment de points entre eux pour estimer une équation de degré m. Un plan de mélange en réseau (3,3) diffère du plan de mélange centré en ayant suffisamment de points pour estimer un modèle cubique complet.

L'augmentation du plan de mélange en réseau revient à ajouter des points intérieurs ; des points de mélange de contrôle et un point central. Les points de mélange de contrôle sont à mi-chemin entre le point central et chaque sommet du simplexe. La figure 6.3 montre un plan de mélange en réseau (3, 2) augmenté de 4 points (un point central + trois points de mélange de contrôle).

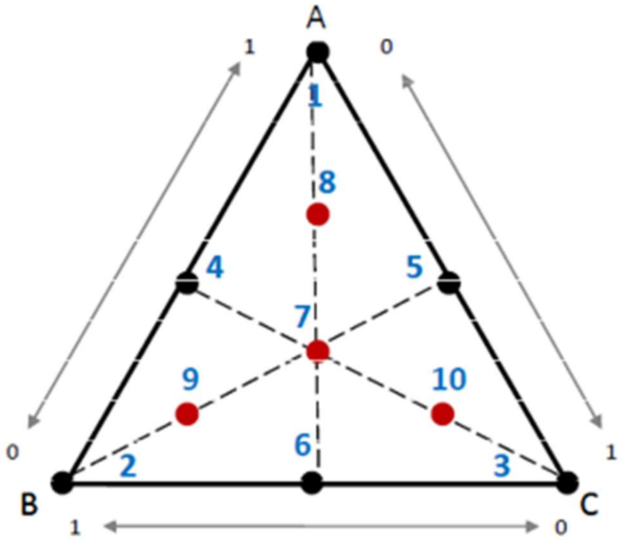


Table 6.2: Plan de mélange en réseau (3,2) augmenté

La nouvelle matrice d'expériences qui correspond au nouveau plan de mélange en réseau (3, 2) augmenté est illustré dans la table 6.2

Exp	A	B	C
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1
4	0,5	0,5	0
5	0,5	0	0,5
6	0	0,5	0,5
7	0,3333	0,3333	0,3333
8	0,6667	0,1667	0,1667
9	0,1667	0,6667	0,1667
10	0,1667	0,1667	0,6667

Table 6.2: Matrice d'expériences pour un plan de mélange en réseau (3, 2) augmenté

6.2.2 Plans de mélange centrés

Un deuxième type de plan de mélange est le plan de mélange centré. Dans le plan de mélange centré à q composants, le nombre de points distincts est 2q–1 points ou mélanges, ces points sont organisés de la manière suivante : q composants purs : q permutations de (1,0,0,0, …, 0).

- Mélanges binaires à proportions égales $\begin{bmatrix} q \\ 2 \end{bmatrix}$ permutations de (1/2, 1/2, 0, 0…, 0).
- Mélanges ternaires à proportions égales $\begin{bmatrix} q \\ 3 \end{bmatrix}$ permutations de (1/3, 1/3, 1/3, 0, …, 0).
- …
- Mélanges q-aire avec des proportions égales (1/q, 1/q, 1/q, …, 1/q).

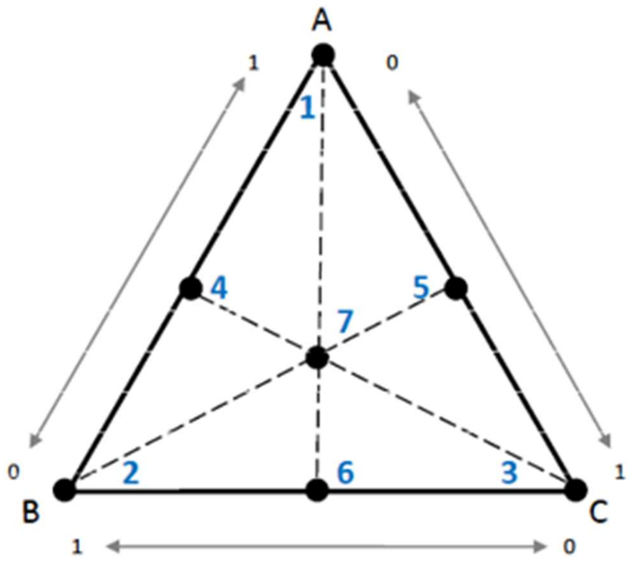


Figure 6.4: Plan de mélange centré à 3 composants

La figure 6.4 et la table 6.3 montrent les différents points expérimentaux pour un plan de mélange centré (3, 2).

Exp	A	B	C
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1
4	0,5	0,5	0
5	0,5	0	0,5
6	0	0,5	0,5
7	0,3333	0,3333	0,3333

Table 6.3: Matrice d'expériences pour un plan de mélange centré à 3 composants

Pour un nombre donné de composants, il n'existe qu'un seul plan de mélange centré, alors que différents plans de mélange en réseaux sont possibles. Les points d'un plan de mélange centré prendront en charge le polynôme suivant :

$$y = \sum_{i=1}^{q} a_i x_i + \sum_{i=1}^{q} \sum_{i<j}^{q} a_{ij} x_i x_j + \cdots . + \sum_{i=1}^{q} \ldots \ldots \quad \sum_{i<j<\cdots\leq q}^{q} a_{ij..q} x_i x_j \ldots x_q \qquad (6.1)$$

Les plans de mélange centrés peuvent être augmentés en ajoutant des points intérieurs ; ces points sont à mi-chemin entre le point central et chaque sommet. La figure 6.5 montre un plan de mélange centré à 3 composants augmenté avec les 3 points.

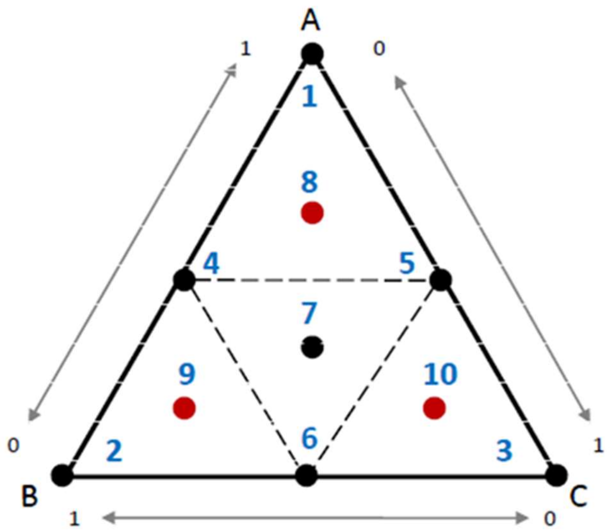


Figure 6.5: Plan de mélange centré à 3 composants (augmenté)

La nouvelle matrice d'expériences qui correspond au nouveau plan de mélange centré à 3 composants augmenté est illustré par la table 6.4.

Exp	A	B	C
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1
4	0,5	0,5	0
5	0,5	0	0,5
6	0	0,5	0,5
7	0,3333	0,3333	0,3333
8	0,6667	0,1667	0,1667
9	0,1667	0,6667	0,1667
10	0,1667	0,1667	0,6667

Table 6.4: Matrice d'expériences pour un plan de mélange centré à 3 composants (augmenté)

6.2.3 Plans de mélange contraints (Sommets extrêmes)

Les plans de sommets extrêmes sont des plans de mélange qui couvrent uniquement une sous partie ou un espace plus petit dans le simplex. Ces plans doivent être utilisés lorsque l'espace du plan choisi n'est pas lui-même un plan simplex. La présence de contraintes de limite inférieure et supérieure sur les composants crée souvent cette condition. Les contraintes sont de la forme

$I_i \leq x_i \leq S_i$; $(i = 1, 2,\ldots,q)$, où Ii est la limite inférieure du i^{eme} composant et S_i la limite supérieure du i^{eme} composant. La forme générale d'un problème de mélange contraint (Plan de sommets extrêmes) est : $x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_q = 1$

Ii < xi < Si pour i = 1, 2,…, q Avec : $I_i >= 0$ et $S_i \leq 1$

Par exemple, vous devez déterminer les proportions de la farine, du lait, de la levure chimique, d'œufs et d'huile dans un mélange à crêpes qui donneront un produit optimal à base de goût. Comme les expériences précédentes indiquent qu'un mélange ne contenant pas tous les ingrédients ou contenant trop de levure chimique ne répondra pas aux exigences de la saveur, vous décidez de limiter le plan en définissant des limites inférieures et supérieures.

L'objectif d'un plan de sommets extrêmes est de choisir des points du plan qui couvrent de manière adéquate l'espace du plan. La figure 6.6 montre les sommets extrêmes d'un plan à trois composants avec des contraintes supérieures et inférieures :

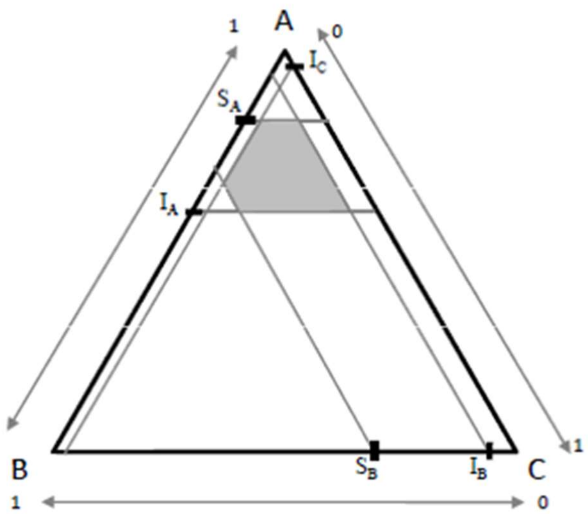


Figure 6.6: Limites inférieures et supérieures dans un plan de mélange contraint

Les lignes en gris clair représentent les limites inférieures et supérieures des composants.

La zone en gris foncé représente l'espace du plan. Les points sont placés aux sommets extrêmes de l'espace du plan.

CHAPITRE 7 :

MODÈLES ALÉATOIRES, PLANS IMBRIQUÉS ET PLAN EN PARCELLES DIVISÉES

7.1 Modèles aléatoires :

En statistique, les modèles aléatoires sont utilisés pour représenter des expériences où les facteurs ou les traitements sont attribués de manière aléatoire aux unités expérimentales. Cette randomisation permet de contrôler les facteurs étrangers et de s'assurer que les effets observés sont principalement dus aux traitements étudiés.

7.1.1 Types de modèles aléatoires :

- **Plan complètement randomisé (CRD):** Le modèle aléatoire le plus simple, où tous les facteurs sont attribués aux unités expérimentales indépendamment.
- **Plan en blocs randomisés (RBD):** Utilisé lorsqu'il existe une source supplémentaire de variabilité (facteur de blocage) qui peut être contrôlée en bloquant les unités expérimentales en groupes.
- **Plan carré latin (LSD):** Un type spécial de RBD où il y a deux facteurs de blocage, et chaque combinaison de traitement apparaît une fois dans chaque rangée et chaque colonne du carré latin.
- **Plan factoriel :** Un plan où plusieurs facteurs sont étudiés simultanément, ce qui permet d'étudier les interactions entre les facteurs.

7.2 Plans imbriqués :

Les plans imbriqués sont utilisés lorsqu'il existe des niveaux hiérarchiques de facteurs ou de traitements dans une expérience. Les facteurs de niveau inférieur sont imbriqués dans les facteurs de niveau supérieur, ce qui signifie que les facteurs de niveau inférieur ne peuvent être appliqués qu'à l'intérieur de niveaux spécifiques des facteurs de niveau supérieur.

7.2.1 Types de plans imbriqués :

- **RBD imbriqué:** Un plan imbriqué où le facteur de blocage est imbriqué dans le facteur de traitement principal.
- **Plan en parcelles divisées:** Un type spécial de plan imbriqué où un facteur (facteur de la parcelle entière) est appliqué à de grandes unités expérimentales, et un autre facteur (facteur de la sous-parcelle) est appliqué à de plus petites sous-unités à l'intérieur de chaque unité de parcelle entière.

7.3 Plans en parcelles divisées :

Les plans en parcelles divisées sont particulièrement utiles lorsqu'il existe des contraintes pratiques qui rendent difficile ou impossible d'appliquer tous les facteurs aux mêmes unités expérimentales. Par exemple, le facteur de la parcelle entière peut représenter un traitement à grande échelle qui est appliqué aux champs, tandis que le facteur de la sous-parcelle peut représenter un traitement à plus petite échelle qui est appliqué à des parcelles individuelles dans chaque champ.

7.3.1 Caractéristiques principales des plans en parcelles divisées :

- **Unités de parcelles entières :** Les unités expérimentales les plus grandes auxquelles le facteur de la parcelle entière est appliqué.
- **Unités de sous-parcelles :** Les unités expérimentales plus petites dans chaque unité de parcelle entière auxquelles le facteur de la sous-parcelle est appliqué.
- **Erreur de la parcelle entière :** Le terme d'erreur associé au facteur de la parcelle entière.
- **Erreur de la sous-parcelle :** Le terme d'erreur associé au facteur de la sous-parcelle.

7.3.2 Analyse des plans en parcelles divisées :

Les plans en parcelles divisées nécessitent des techniques d'analyse statistique spécialisées qui tiennent compte de la structure hiérarchique de l'expérience et des différents termes d'erreur. Ces techniques permettent de séparer les effets du facteur de la parcelle entière et du facteur de la sous-parcelle, ainsi que toute interaction entre eux.

Considérations importantes :

- **Randomisation :** La randomisation des facteurs de la parcelle entière et des sous-parcelles est cruciale pour contrôler la variabilité étrangère et assurer des inférences valides.
- **Structure de l'erreur :** La structure de l'erreur des plans en parcelles divisées est complexe et doit être soigneusement prise en compte dans l'analyse.
- **Équilibre :** L'équilibre de l'expérience, par exemple en ayant un nombre égal de réplications pour chaque combinaison de traitement, est essentiel pour une estimation efficace et des comparaisons valides.

Les modèles aléatoires, les plans imbriqués et les plans en parcelles divisées sont des outils puissants pour mener des expériences dans divers domaines, notamment l'agriculture, la biologie, la psychologie et l'ingénierie. En comprenant ces plans et en appliquant des méthodes statistiques appropriées, les chercheurs peuvent étudier efficacement les effets de plusieurs facteurs et tirer des conclusions significatives sur les relations entre eux.

BIBLIOGRAPHIE

1. **Giesbrecht, G. F., Burns, K. A., & Carver, D. S**. (2001). Design and analysis of experiments with repeated measures (1st ed.). Lawrence Erlbaum Associates

2. **Keppel, G., & Wickens, T. D**. (2004). Design and analysis: A researcher's handbook (4th ed.). Prentice Hall.

3. **Box, G. E. P., Hunter, W. G., & Draper, N. R**. (2005). Empirical model-building and response surfaces (3rd ed.). Wiley.

4. **Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter, J., & Li, W**. (2005). Applied linear statistical models (5th ed.). McGraw-Hill.

5. **Jacques GOUPY**. Les plans d'expériences. (2006). Revue MODULAD, 2006 - 74 - Numéro 34.

6. **Littell, R. C., & Milliken, G. E**. (2006). The SAS system for mixed models (2nd ed.). SAS Institute.

7. **Montgomery, D. C**. (2013). Design and analysis of experiments (8th ed.). Wiley.

8. **Montgomery, D. C**. (2017). *Design and Analysis of Experiments* (9th ed.). Wiley.

9. **Mohamed Skander DAAS**. (2019). Plans d'expériences, Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie Université Frères Mentouri - Constantine 1.

.